**Лекция 5. Управляемость линейных систем с фазовыми**

**ограничениями. Семинарское занятие № 3.**

Рассмотрим следующую задачу управляемости. Найти управление

 (1.87)

которое переводит траекторию системы

 (1.88)

исходящей из начальной точки  в момент времени , в точку   т.е.

 (1.89)

при этом решение системы (1.88) функция  находится на множестве , т.е.

 (1.90)

Решение задачи (1.87)–(1.90) может быть сведено к решению следующей оптимизационной задачи:

 (1.91)

при условиях

 (1.92)

 (1.93)

 (1.94)

где заданная матрица с кусочно-непрерывными элементами порядка  известная вектор-функция  с кусочно-непрерывными элементами,  заданные непрерывные вектор- функции.

Как следует из теоремы 3, функция (см. (1.17))

 (1.95)

где



Введем обозначения

 

Заметим, что:

1. значение 
2. задача 4 имеет решение тогда и только тогда, когда значение , где решение оптимизационной задачи (1.91) – (1.94);
3. Если , то







где   

**Программное управление.** Отметим, что если  минимизирующая последовательность, для которой  то задача 4 имеет решение. В случае,  задача 4 не имеет решение. Как следует из формулы (1.95) последнее слагаемое из (1.91) равно



**Теорема 11.** *Пусть матрица  Тогда функционал (1.91) при условиях (1.92) – (1.94) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

**

*в любой точке  вычисляется по формуле*

* (1.96)*

* (1.97)*

*(1.98)*

* (1.99)*

* (1.100)*

*где  решение дифференциального уравнения (1.92), а функция  решение сопряженной системы*

* (1.101)*

*Кроме того, градиент  удовлетворяет условию Липшица*

* (1.102)*

**Доказательство.** Пусть       функция

 (1.103)

где 

Тогда приращение функционала

 (1.104)

где 

Как следует из (1.103), функция  может быть представлена в виде

 (1.105)

Легко убедиться в том, что

 (1.106)

Как следует из (1.105), частные производные  удовлетворяют условиям Липшица

 (1.107)

Уравнения для сопряженной системы (1.101) запишется в виде

 (1.108)

Приращение функционала (1.104) может быть представлено в виде

 (1.109)

где







Отсюда, с учетом (1.107), получим

 (1.110)

Рассмотрим два последних слагаемых из (1.109):





Теперь приращение функционала (1.109) запишется так:

 (1.111)

Из (1.110), с учетом того, что    имеем



при 

Тогда из соотношения (1.111) следует, что градиент  определяется по формулам (1.96) - (1.100), где  решение системы (1.101).

Пусть   Тогда





где  в силу оценки (1.110), 

Следовательно,



Отсюда, с учетом того, что  получим оценку (1.102). Теорема доказана.

Строим последовательности  по следующему алгоритму (см. (1.96) - (1.100))

 (1.112)

где . В частности, при  имеем   постоянная Липшица из (1.102).

**Лемма 3.** *Пусть  ограниченные выпуклые замкнутые множества в  ограниченное выпуклое замкнутое множество в  ограниченное выпуклое замкнутое множество в *

*Тогда:*

*1) функционал  из (1.89) при условиях (1.90) - (1.92) является выпуклым;*

*2) функционал  достигает нижней грани на множестве *

**Доказательство.** Как следует из (1.105), вторая производная



где . Следовательно,  является выпуклой функцией относительно  при всех  т.е.



Поскольку    то



где  Второе утверждение леммы следует из слабой полунепрерывности снизу функционала   и слабой бикомпактности множества  Лемма доказана.

**Теорема 12.** *Пусть матрица  ограниченные выпуклые замкнутые множества, последовательности  определяются соотношениями из (1.112). Тогда:*

*1) последовательность  является минимизирующей, т.е *

*2) последовательность  слабо сходится к множеству  где       при *

*3) для того чтобы задача 4 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение  *

*4) справедлива оценка   *

**Доказательство.** Из (1.112) имеем











Отсюда, как в доказательстве теоремы 9, получим

 (1.113)

Следовательно,  при   при  Из выпуклости функционала, имеем

 (1.114)

Тогда  в силу того, что  при  Из оценок (1.113), (1.114) получим  

Наконец, если  то

 (1.115)

Теорема доказана.

**Позиционное управление.** По программному управлению (1.115) можно найти позиционное управление 

**Теорема 13.** *Пусть выполнены условия теорем 11, 12, и пусть, кроме того  неособая матрица   определяется по формуле (1.23), значение    Тогда позиционное управление  где  *

**Оптимальное быстродействие.** Необходимо найти наименьшее значение  в задаче (1.87) – (1.90). Для этого определим значения  по следующему алгоритму: 1. Решаем задачу управляемости (1.87) – (1.90), находим пару   где 

2. Выберем значение  Определим пару  

3. Если значение  то выберем 

4. Если значение  то  и т.д.